

Gli insiemi

Che cosa è un insieme?

In matematica si definisce **insieme** un raggruppamento per cui è possibile stabilire senza ambiguità se un elemento vi appartiene o no.

Sono insiemi:

- i giorni della settimana
- gli studenti del liceo Einstein

Non sono insiemi:

- gli studenti simpatici della tua classe (la simpatia non è un criterio oggettivo)
- i programmi divertenti trasmessi in Tv nel mese di Ottobre (un programma per qualcuno può essere divertente , per altri no)

Come si indica un insieme?

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole A, B, C, \dots

In particolare:

\mathbb{N} è l'insieme dei numeri naturali

\mathbb{Z} è l'insieme dei numeri interi

\mathbb{Q} è l'insieme dei numeri razionali

\mathbb{R} è l'insieme dei numeri reali

Gli elementi di un insieme si indicano con le lettere minuscole.

Il simbolo \in è il simbolo di appartenenza quindi:

- per indicare che un elemento a appartiene all'insieme A si scrive $a \in A$,
- per indicare che un elemento b non appartiene all'insieme A si scrive $b \notin A$.

Un insieme che non contiene elementi è detto **insieme vuoto** e si indica con il simbolo \emptyset o con $\{\}$.

Esempio: l'insieme dei numeri dispari divisibili per due non contiene elementi quindi è un insieme vuoto.

Due insiemi che sono formati dagli stessi elementi si dicono **uguali**.

Come si rappresenta un insieme?

- **Rappresentazione tabulare o per elencazione**

Si elencano tra parentesi graffe tutti gli elementi dell'insieme separati da una virgola.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Esempio: l'insieme delle lettere della parola mamma è $\{m, a\}$

Attenzione: gli elementi uguali si scrivono una sola volta.

- **Rappresentazione mediante la proprietà caratteristica**

Consiste nell'indicare con x un qualsiasi elemento dell'insieme e nello specificare una o più proprietà che servono a stabilire se un elemento appartiene o no all'insieme considerato.

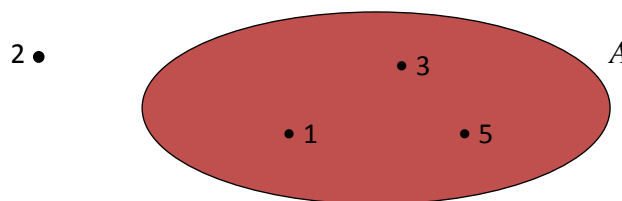
Esempio : La rappresentazione per caratteristica dell'insieme B degli studenti del Liceo Einstein è

$$B = \{x / x \text{ è uno studente del Liceo Einstein}\}$$

che si legge : l'insieme degli elementi x tale che x è uno studente del Liceo Einstein.

- **Rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn**

Gli elementi dell'insieme vengono rappresentati come punti all'interno di una linea curva non intrecciata.

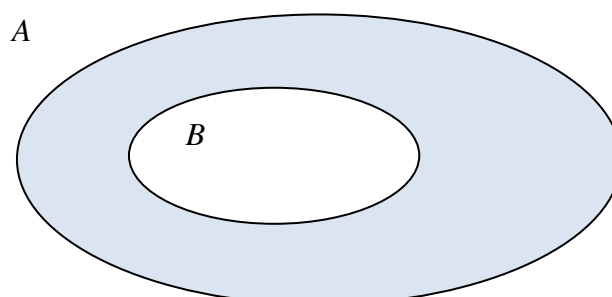


Dalla figura si può dire che $2 \notin A$, $1 \in A$

Cos'è un sottoinsieme?

Dati due insiemi A e B diciamo che B è un **sottoinsieme** di A quando tutti gli elementi dell'insieme B appartengono anche all'insieme A .

In simboli si scrive $B \subseteq A$ che si legge B è un sottoinsieme di A o anche B è incluso in A .



L'insieme B è un sottoinsieme

- **Proprio** se non è vuoto e se è diverso da A cioè se esistono degli elementi di A che non appartengono a B .
- **Improprio** se è vuoto o se è uguale all'insieme A

Un insieme che contiene n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

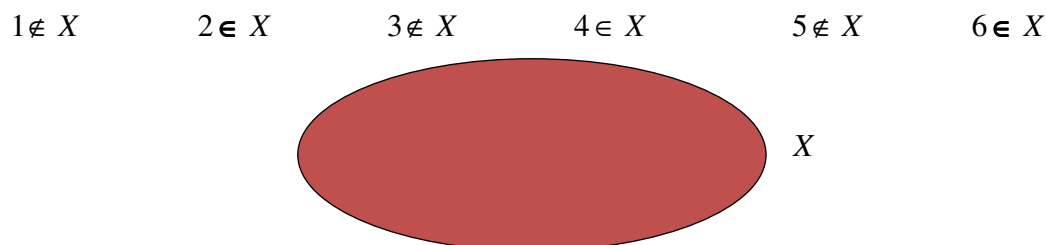
L'insieme delle parti di A è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$

Esempio

Se $A = \{1, 2\}$ i suoi sottoinsiemi sono: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ quindi $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$.

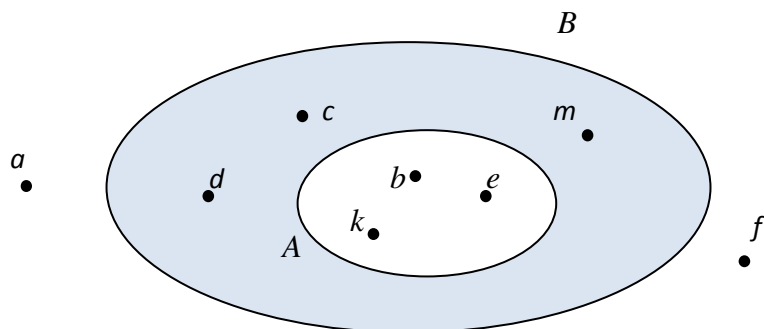
ESERCIZIO 1.1

1. Indica quali dei seguenti raggruppamenti formano degli insiemi
 - a. Le auto immatricolate in Italia nel 2011
 - b. Le più belle canzoni di Claudio Baglioni
 - c. I fiumi italiani più lunghi
 - d. Le preposizioni semplici
 - e. I quadrilateri
 - f. I giovani cittadini italiani
 - g. I cittadini italiani nati dopo il 2005
2. Indica quali dei seguenti insiemi sono vuoti
 - a. L'insieme dei cittadini italiani di 12 anni in possesso della patente automobilistica.
 - b. L'insieme dei numeri naturali minori di zero
 - c. L'insieme dei multipli di zero
 - d. L'insieme dei divisori di un numero primo.
 - e. L'insieme dei numeri naturali compresi tra 10 e 11.
3. In base alle informazioni fornite completa il diagramma di Eulero-Venn



Rappresenta l'insieme X mediante la sua proprietà caratteristica.

4. In base alla figura completa con i simboli opportuni



$a \dots A$

$a \dots B$

$A \dots B$

$d \dots A$

$d \dots B$

$k \dots A$

$k \dots B$

L'insieme A è formato da elementi quindi ha sottoinsiemi.

Determina $\mathcal{P}(A)$.

5. Dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 \leq 25\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$$

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

individua gli insiemi uguali e le eventuali relazioni di inclusione.

6. Dati gli insiemi A, B, C tali che

$$B \subset C$$

$$B \subset A$$

$$A \subset C$$

Rappresentali con i diagrammi di Eulero-Venn.

7. Rappresenta con i diagrammi di Eulero-Venn gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 11\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ è un numero pari e } x \leq 12\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ è un numero primo e } x \leq 10\}$$

In base alle relazioni precedenti stabilisci quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$A = B$

$A \subset C$

$B \subset C$

$B \subset A$

$C \subset B$

$A \not\subset B$

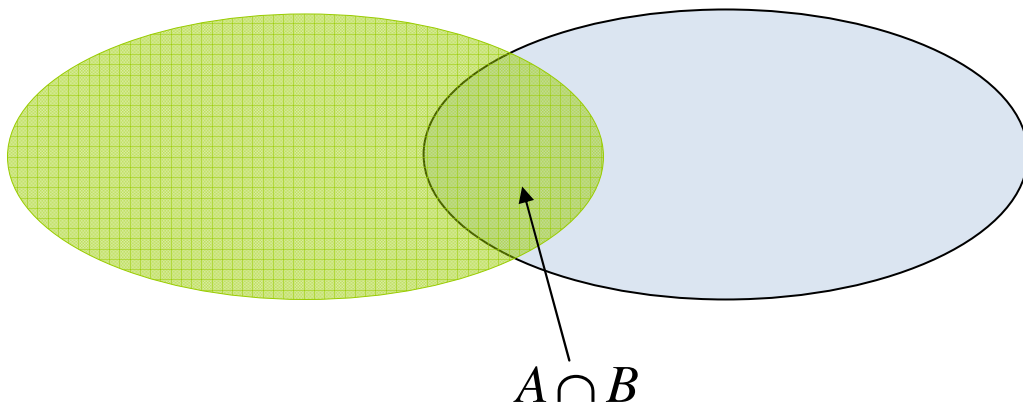
Quali sono le operazioni con gli insiemi?

- **Intersezione**

L'intersezione tra due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi comuni ai due insiemi, cioè dagli che appartengono all'insieme A e all'insieme B

In simboli $A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$

Attenzione: la "e" indica che devono essere verificate entrambe le condizioni.

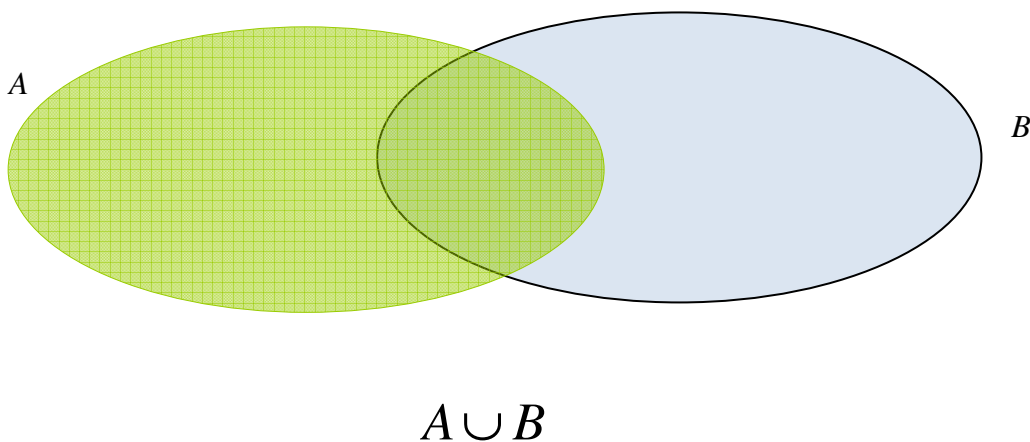


Se l'intersezione tra due insiemi è vuota gli insiemi si dicono **disgiunti**

- **Unione**

L'unione tra due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, cioè dagli elementi che appartengono solo all'insieme A , solo all'insieme B e da quelli comuni ai due insiemi

In simboli $A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$

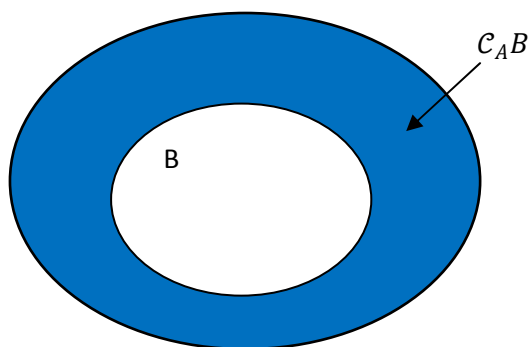


• Differenza e complementare

L'insieme differenza tra due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B .

In simboli $A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Nel caso particolare in cui B è un sottoinsieme di A la differenza tra A e B si chiama complementare di B rispetto ad A e si indica con $C_A B$ o con il simbolo \overline{B}_A .



• Prodotto cartesiano

Il prodotto cartesiano tra due insiemi A e B è l'insieme formato dalle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene all'insieme A e il secondo elemento appartiene all'insieme B .

In simboli $A \times B = \{(a ; b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$

ESERCIZIO 1.2

1. Dopo aver rappresentato con i diagrammi di Eulero-Venn gli insiemi A e B determina $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $A \times B$ e poi rispondi alle domande:

- uno dei due insiemi è sottoinsieme dell'altro?
- gli insiemi sono disgiunti?
- $A \cap B$ è un sottoinsieme di A ?
- $A \cap B$ è un sottoinsieme di B ?
- A è un sottoinsieme di $A \cup B$?
- B è un sottoinsieme di $A \cup B$?
- A è un sottoinsieme di $A \times B$?
- B è un sottoinsieme di $A \times B$?

- a. $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{b, c\}$
- b. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$
- c. $A = \{x \in N / 3 < x < 10\}$ $B = \{x \in N / x \geq 5\}$
- d. $A = \{x / x \text{ è una vocale della parola "scienza"}\}$
 $B = \{x / x \text{ è una lettera della parola "amico"}\}$ $B = \{x \in N / x \geq 5\}$

2. Dati gli insiemi

$$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\} \quad B = \{0, 10, 20, 30, 40\} \quad C = \{10, 20, 40, 80\}$$

determina:

- a. $A \cap (B \cap C)$
- b. $(A \cup B) \cup C$
- c. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
- d. $(A \cap B) \cap (A \cap C)$
- e. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
- f. $(A \cap B) \times (B \cap C)$

3. Determina l'intersezione tra l'insieme dei numeri dispari con una sola cifra e l'insieme dei numeri dispari maggiori di 9

4. Determina l'intersezione tra l'insieme dei numeri dispari con una sola cifra e l'insieme dei numeri dispari maggiori o uguali a 9

5. Calcola $A \times B$ e $B \times A$ sapendo che $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2\}$. I due insiemi sono uguali?

6. Sia A l'insieme delle coppie ordinate $(a; b)$ di numeri naturali che soddisfano l'uguaglianza $a \cdot b = 16$, e B l'insieme delle coppie ordinate $(x; y)$ di numeri naturali che soddisfano l'uguaglianza $x + 2y = 12$. Dopo aver rappresentato i due insiemi per elencazione determina $A \cap B$.

7. Determina l'intersezione tra l'insieme dei triangoli isosceli e l'insieme dei triangoli rettangoli.

8. Dati tre insiemi A , B e C tali che $B \subset C \subset A$, determina:

- a. $A \cap B \cap C$
- b. $A \cup B \cup C$
- c. $C_A B$

9. Sapendo che $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{1, 3\}$ verifica le seguenti uguaglianze:

- a. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- b. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- c. $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$

10. Sapendo che $U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4\}$ e $C = \{4, 6, 8\}$ verifica le seguenti uguaglianze:

- a. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$