# I numeri naturali

## Cosa sono i numeri naturali?

I numeri **naturali** sono i numeri

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12……………………………………

L'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$= { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …………………………….}

## Quali sono le caratteristiche di $\mathbb{N}$?

L'insieme $\mathbb{N}$ è un insieme

- **infinito** (preso un qualunque numero naturale è sempre possibile trovare il suo successivo)
- **ordinato** ( presi due numeri naturali qualunque è sempre possibile stabilire se sono uguali o quale dei due è il maggiore e quale il minore)
- **discreto** (tra due numeri naturali qualunque non consecutivi esistono un numero finito di numeri naturali)

## Le operazioni in $\mathbb{N}$

- **addizione**

$$7 + 8 = 15$$

**addendi** **somma**

- **moltiplicazione**

$$3 \cdot 7 = 21$$

**Fattori** **prodotto**

L'addizione e la moltiplicazione sono operazioni che danno sempre come risultato un numero naturale, sono cioè operazioni **interne** a $\mathbb{N}$.

## Legge d'annullamento del prodotto

Il prodotto di due fattori è zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero.

In simboli

$$a \cdot b = 0 \quad \text{se e solo se} \quad a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0$$

cioè:

- se $a = 0$ oppure $b = 0$ allora $a \cdot b = 0$
- se $a \cdot b = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$

- **sottrazione**

| 17 | - | 9 | = | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| **minuendo** | | **sottraendo** | | **differenza** |

**Quando il minuendo è minore del sottraendo la sottrazione non si può eseguire in $\mathbb{N}$**

- **divisione**

| 48 | : | 8 | = | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| **dividendo** | | **divisore** | | **quoziente** |

**Ricorda**: dividere due numeri significa trovare un terzo numero (quoziente) che moltiplicato per il divisore dia come risultato il dividendo.

Ad esempio : 36 : 9 =4 perché 4 · 9 =36

In una divisione il divisore deve essere **sempre** diverso da zero.

- la divisione $n : 0$ con $n \neq 0$ è **impossibile** perché non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dia come risultato un numero diverso da 0;
- la divisione 0 : 0 è **indeterminata** perché qualunque numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0.

Ci sono dei casi in cui, pur essendo il divisore diverso da 0, **la divisione non è possibile in** $\mathbb{N}$. Ad esempio 17 : 3 non dà come risultato un numero intero .

La sottrazione e la divisione **non sono operazioni interne a** $\mathbb{N}$ perché non danno sempre come risultato un numero naturale,

- ## espressioni aritmetiche

Per calcolare il valore di un'espressione aritmetica cioè trovare il risultato che si ottiene eseguendo tutte le operazioni, si procede seguendo alcune **regole di precedenza** :

- **se non ci sono parentesi** si eseguono prima le moltiplicazioni e le divisioni e poi le addizioni e le sottrazioni (nell'ordine in cui sono scritte)

- **se ci sono delle parentesi**, si eseguono prima i calcoli che si trovano nelle parentesi iniziando dalle parentesi più interne ed eseguendo i calcoli secondo l'ordine indicato nel punto precedente; dopo aver eliminato tutte le parentesi si procede come indicato nel punto precedente.

**Esempi**

$$35-21+\underbrace{10:5\cdot 6}-4=$$

Nell'espressione non ci sono parentesi perciò eseguiamo i calcoli partendo dalle moltiplicazioni e divisioni, eseguendole nell'ordine in cui si presentano quindi **prima** la divisione

$$=35-21+2\cdot 6-4=$$

eseguiamo la moltiplicazione

$$=35-21+12-4=$$

le uniche operazioni rimaste sono addizioni e sottrazioni: eseguiamole nell'ordine in cui si presentano

$$=14+12-4=$$

$$=26-4=22$$

---

$$3+3\cdot\left(\underbrace{6:3}_{2}+1\right)-\left(4-\underbrace{4:2}_{2}\right)\cdot\left[7-\left(16-\underbrace{5\cdot 2}_{10}\right)\right]=$$

Eseguiamo le operazioni nelle parentesi

tonde partendo da moltiplicazioni e divisioni

$$=3+3\cdot\left(\underbrace{2+1}_{3}\right)-\left(\underbrace{4-2}_{2}\right)\cdot\left[7-\left(\underbrace{16-10}_{6}\right)\right]=$$

eseguiamo le operazioni rimaste nelle

parentesi tonde

$$=3+3\cdot 3-2\cdot\left[\underbrace{7-6}_{1}\right]=$$

eseguiamo le operazioni nella parentesi quadra

$$=3+3\cdot 3-2\cdot 1=$$

eseguiamo le moltiplicazioni

$$=3+9-2=$$

eseguiamo le operazioni rimaste nell'ordine in cui si presentano

$$=12-2=10$$

**ESERCIZIO 2.1**

Calcola il valore delle seguenti espressioni

1. $11+(9-5)-(3+6-2)+5-8$
2. $(8+4)+(8-5)-(35+2-9\cdot 4)+6-1$
3. $5-\{9+3\cdot[3\cdot(7-3)-2\cdot(11-6)]\}:[7-2\cdot(6-4)]$
4. $[7+(9-5)-6]+(9-6)-[8-(3+3)+(5-4)]+3$
5. $6-(2+210:6-1):\{6\cdot 2-[35:7+(40-3\cdot 5):5+6]:4+1\}:(9-5)-1$
6. $3\cdot\{18:[3+(13+1):(49:7)+1]+(30:6-3)\}$
7. $(20+4):[(22-12)\cdot 2+(21:3+5):3-40:2]-\{[(4\cdot 4-5\cdot 3):(3\cdot 2-5)]\cdot 9-6\}:(5-2)$
8. $(14\cdot 2+20):\{12:[(6\cdot 3-8)-(9\cdot 4+8):11]\cdot 2\}-(40:10:2)+9\cdot 2$
9. $\{[(72-11\cdot 2)-(8\cdot 9:18:2+10-2)]:20+30-15\}-20:[23-13]-3\cdot[(12-9)\cdot 2-2]$
10. $\{[54:6:3\cdot(7\cdot 10-2\cdot 15)]:4+10\}:(6\cdot 3-72:9)$

## elevamento a potenza

Il prodotto di $n$ fattori $a$ tutti uguali fra di loro si chiama potenza:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot a}_{n\ volte}$$

$a$ si chiama **base**
$n$ si chiama **esponente**

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1 \; per \; ogni \; a \neq 0$
- Rimane non definito in $\mathbb{N}$ e quindi privo di significato il simbolo $0^0$.

## proprietà delle potenze

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  Esempio:
  $$5^3 \cdot 5^{10} = 5^{3+10} = 5^{13}$$
  **Attenzione**: le basi **non** devono essere moltiplicate fra loro

- $a^m : a^n = a^{m-n}$
  Esempio:
  $$4^8 : 4^6 = 4^{8-6} = 4^2$$

- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
  Esempio:
  $$2^7 \cdot 7^7 = (2 \cdot 7)^7 = 14^7$$
  **Attenzione:** a volte è necessario applicare la proprietà nel verso opposto cioè
  $$21^5 = (3 \cdot 7)^5 = 3^5 \cdot 7^5$$

- $a^n : b^n = (a : b)^n$
  Esempio:
  $$36^8 : 12^8 = (36 : 12)^7 = 3^7$$

**ESERCIZIO 2.2**

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando, dove possibile le proprietà delle potenze

1. $\left(2^3 \cdot 2^5 : 2^6 + 2\right) : 2$
2. $15^3 : 5^3 \cdot 3^4 : 3^6$

3. $27^4 : 3^4 : 81$

4. $\left(2^2 + 2 + 3^2\right) : 5 + 3^2$

5. $\left\{\left[\left(12^2 : 6^2 \cdot 3^2 - 4^2\right) : 2^2 + 5^2\right] + 6\right\} : 3^2$

6. $\left(4^3 : 2^3\right)^2 : \left(2^2\right)^2 - \left(3^4 + 3^8\right)^0 + 14^3 : 7^3$

7. $\left[64 \cdot \left(11^2 \cdot 11\right)^2\right]^2 : 22^{11}$

8. $\left[\left(7^{15}\right)^4 : \left(7^8\right)^2 : \left(7^6\right)^6\right]^2 : \left(7^5\right)^3 + 7^2$

9. $\left[\left(4^4 \cdot 4^3\right)^3 : 4^{11} : 4^9\right] : \left[\left(5^8 \cdot 5^3\right)^2 : 5^{22}\right]$

10. $\left\{\left[\left(12^7 \cdot 12^4 \cdot 12^3\right)^5 : \left(120^8 : 10^8\right)^8\right]^7 : \left(12^8\right)^5\right\}^9 \cdot \left(2^5 \cdot 8^3 : 4^4\right)^3 : 8^6$

11. $\left[2^3 - 2 \cdot 2^2 + \left(5^2\right)^4 : 5^8 - 1\right]^0$

12. $\left[2^4 \cdot 2^0 - \left(1^5 + 3^2\right) - 4^7 : \left(4^3\right)^2\right]^{46} : \left(4^9 \cdot 2^5\right)^2$

# M.C.D. e m.c.m.

Un **numero primo** è un numero naturale maggiore di 1 che ammette come divisori solo 1 e il numero stesso.

Si chiama **M.C.D.** di due o più numeri naturali, diversi da zero, il più grande divisore comune.

Per determinare il M.C.D. di due o più numeri

- si scompongono i numeri in fattori primi
- si calcola il prodotto dei fattori comuni presi una sola volta con il più piccolo esponente

Due numeri naturali si dicono **primi fra loro** quando il loro M.C.D. è uguale a 1.

Si chiama **m.c.m.** di due o più numeri naturali, diversi da zero, il minore multiplo comune, diverso da zero.

Per determinare il m.c.m. di due o più numeri

- si scompongono i numeri in fattori primi
- si calcola il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi una sola volta con il più grande esponente

**ESERCIZIO 2.3**

Determina il M.C.D. e il m.c.m. fra i seguenti numeri

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | 224 | 168 | |
| 2. | 144 | 360 | |
| 3. | 198 | 72 | 54 |
| 4. | 104 | 130 | 26 |