I radicali

Cos'è un radicale?

Il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

si chiama **radicale** e si legge **radice ennesima di a.**

- **n** si chiama **indice della radice** e deve essere un numero naturale maggiore di zero. Quando $n = 2$ l'indice si sottintende e il radicale si legge radice quadrata : $\sqrt{7}$ rappresenta la radice quadrata di 7
- **a** si chiama **radicando**

Se n è pari la $\sqrt[n]{a}$ con $a \geq 0$ è il numero reale non negativo che elevato a n dà come risultato a.

Se n è dispari la $\sqrt[n]{a}$ è il numero reale che elevato a n dà come risultato a

In particolare

- $n = 1$: $\sqrt[1]{a} = a$
- $n > 0$: $\sqrt[n]{0} = 0$
- $n = 0$: $\sqrt[0]{a}$ non ha significato

Attenzione : non esiste la radice di indice pari di un numero negativo, infatti qualunque numero reale elevato a un esponente dispari dà come risultato un numero positivo.

Le **condizioni di esistenza di un radicale** (C.E.) sono le condizioni che devono rispettare le eventuali incognite presenti nel radicando perché i radicali abbiano significato.

Due radicali si dicono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicale.

Esempio

Il radicale $\sqrt{x-3}$ (con indice uguale a 2 e quindi pari) ha significato solo se il radicando è un numero non negativo. Quindi per determinare le condizioni di esistenza devo risolvere la disequazione $x - 3 \geq 0$.

Quindi C.E. : $x \geq 3$

Due radicali sono **simili** quando hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

ESERCIZIO 2.1

Determina le C.E. dei seguenti radicali e delle seguenti espressioni contenenti radicali

1. $\sqrt{x+7}$
2. $\sqrt{x^2+3}$

3. $\sqrt{3x-4}$

4. $\sqrt[3]{3x+9}$

5. $\sqrt[6]{5x-1}$

6. $\sqrt[7]{x-8}$

7. $\sqrt{2x-4}+\sqrt{3x+1}$

8. $\sqrt{4-x}-\sqrt{x+5}$

9. $\sqrt[5]{2x}-\sqrt[4]{6x+1}+\sqrt{x+2}$

10. $\sqrt{9x}+\sqrt{5-15x}$

La proprietà invariantiva dei radicali e le sue applicazioni

Il valore di un radicale (con radicando non negativo) non cambia se si moltiplica l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo, cioè

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad \text{con } a \geq 0, \quad n, m, p \ \ numeri\ interi\ \ positivi$$

- ## Semplificazione di un radicale

Per semplificare un radicale:

- scompongo il radicando in fattori primi
- calcolo il M.C.D. fra gli esponenti dei fattori del radicando i l'indice della radice
- divido sia l'indice della radice, sia gli esponenti dei fattori del radicando per il loro M.C.D.

Attenzione: i radicali devono avere lo stesso segno sia prima sia dopo la semplificazione quindi

- se il radicale da semplificare ha indice pari devono risultare non negativi tutti i fattori radicale sia prima sia dopo la semplificazione
- se il radicale da semplificare ha indice dispari si può sempre applicare la proprietà invariantiva.

Se il M.C.D. tra gli esponenti del radicando e l'indice del radicale è 1 il radicale si dice **irriducibile**.

Esempio

Semplificare i seguenti radicali

$\sqrt[12]{27a^6b^9}$ = scompongo in fattori primi il radicando

$= \sqrt[12]{3^3a^6b^9} =$ calcolo il M.C.D. fra gli esponenti del radicando e l'indice della radice

M.C.D.=3

e divido tutti gli esponenti e l'indice della radice per il M.C.D.

> *Per poter semplificare un radicale si deve poter dividere* ***tutti gli esponenti*** *per il* M.C.D.

$= \sqrt[4]{3a^2b^3}$

$\sqrt{6a^2b^6x}$ non si può semplificare perché sia 6 sia x hanno esponente uguale a 1

$\sqrt[15]{x^{25}y^{10}} = \sqrt[3]{x^5y^2}$

- **Riduzione di più radicali allo stesso indice**

Per ridurre più radicali allo stesso indice (minimo comune indice):

- semplifico i radicali
- calcolo il m.c.m. fra gli indici
- a ciascun radicale assegno come indice il m.c.m. trovato
- moltiplico gli esponenti di ogni radicando per il quoziente tra il m.c.m. e l'indice del radicale stesso

esempio

Ridurre allo stesso indice i seguenti radicali $\sqrt[4]{3a^2b^3}$ $\sqrt[24]{36x^{18}}$ $\sqrt{4a^5y}$

- Semplifico il secondo radicale : $\sqrt[24]{36x^{18}} = \sqrt[24]{6^2\,x^{18}} = \sqrt[12]{6x^9}$
- I radicali da ridurre allo stesso indice sono quindi $\sqrt[4]{3a^2b^3}$ $\sqrt[12]{6x^9}$ $\sqrt{4a^5y}$
- Il m.c.m. fra gli indici (4, 12, 2) è 12
- $12:4 = 3$ $12:12 = 1$ $12:2 = 6$
- $\sqrt[4]{3a^2b^3} = \sqrt[12]{3^3a^6b^9}$
- $\sqrt[12]{6x^9} = \sqrt[12]{6x^9}$
- $\sqrt{4a^5y} = \sqrt[12]{4^6a^{30}y^6}$

ESERCIZIO 2.2

Semplifica i seguenti radicali

1. $\sqrt[16]{432}$
2. $\sqrt[4]{64}$
3. $\sqrt[9]{27x^6y^9}$
4. $\sqrt{8x^4}$
5. $\sqrt[6]{6^2-3^2}$
6. $\sqrt[10]{3^5 6^{10}}$

7. $\sqrt[4]{\frac{25}{36}a^8}$

8. $\sqrt[4]{a^2+4a+4}$

ESERCIZIO 2.3

Riduci allo stesso indice i seguenti radicali

1. $\sqrt[4]{42}, \quad \sqrt[3]{10}, \quad \sqrt[8]{36}$

2. $\sqrt[3]{8a^2b}, \quad \sqrt[6]{9x}, \quad \sqrt[9]{27a^5b^2}$

3. $\sqrt{4a}, \quad \sqrt[4]{4ab^2}, \quad \sqrt[3]{3a^2b}$

4. $\sqrt[3]{x^2+2x+1}, \quad \sqrt{x+1}, \quad \sqrt[4]{x^2-y^2}$

Operazioni con i radicali

- **Moltiplicazione e divisione**

  Per moltiplicare due radicali :
  - se **hanno lo stesso indice** scrivo il radicale che ha stesso indice e il radicando uguale al prodotto dei radicandi
  - se **hanno indici diversi** prima li riduco allo stesso indice e poi applico la regola precedente.

Esempio

1. $\sqrt{2x^2y^5}\cdot\sqrt{3x^3} =$ i radicali hanno **lo stesso indice** quindi posso moltiplicarli scrivendo un unico radicale con lo stesso indice e con radicando il prodotto dei radicandi

$= \sqrt{2x^2y^5\cdot 3x^3} =$

$= \sqrt{6x^5y^5}$

2. $\sqrt[3]{x+1} : \sqrt{x^2-1} =$ i radicali **non** hanno lo stesso indice quindi prima li riduco allo stesso indice

$= \sqrt[6]{(x+1)^2} : \sqrt[6]{(x^2-1)^3} =$ trasformo la divisione in moltiplicazione e scrivo un unico radicale

$$= \sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3(x-1)^3}} =$$

semplifico la frazione dopo aver scomposto in fattori il denominatore

$$= \sqrt[6]{\frac{1}{(x+1)(x-1)^3}}$$

ESERCIZIO 2.4

Esegui le seguenti operazioni tra radicali (supponi che tutti i radicandi siano positivi)

1. $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}} : \sqrt{\frac{1}{9}}$
2. $\sqrt{3-\frac{12}{5}} \cdot \sqrt{1-\frac{22}{27}}$
3. $\sqrt{a-1} \cdot \sqrt{a+1} : \sqrt{a^2-1}$
4. $\sqrt[3]{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2-2x+1}{x^3-4x^2+4x}}$
5. $\sqrt[12]{\frac{1}{15}x^2y^3} \cdot \sqrt[12]{24x} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{5}xy^4} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{5}x^2y^2}$
6. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \cdot \sqrt[12]{\frac{27x^2}{16y}} : \sqrt[6]{\frac{9x^5}{4y^2}}$
7. $\sqrt[8]{\frac{x^3+x^2y}{x-y}} : \sqrt[4]{\frac{x^2+xy}{x-y}}$
8. $\sqrt[3]{a^2+2a+1} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3(a-1)^4}{(a^2-1)^4}}$
9. $\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} : \sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$
10. $\sqrt[3]{\frac{x(x-y)}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{x}} : \sqrt[4]{\frac{x-y}{x^2}}$

- **Trasporto di un fattore sotto il segno di radice**

  Per portare sotto radice

  - un fattore non negativo lo scrivo sotto radice elevandolo ad un esponente uguale all'indice della radice
  - un fattore negativo scrivo sotto radice il valore assoluto del fattore, lasciando il segno meno fuori dal radicale.

Esempio

- $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$
- $2\sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2^3(x+2)}$
- $-3\sqrt{3} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} = -\sqrt{27}$

- ## Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

Se un fattore (positivo) del radicando ha esponente maggiore o uguale all'indice della radice, può essere portato fuori dal segno di radice procedendo in questo modo:

- divido l'esponente di questo fattore per l'indice della radice
- scrivo fuori radice il fattore considerato con esponente uguale al quoziente della divisione
- scrivo sotto radice il fattore considerato con esponente uguale al resto della divisione

Esempio

- $\sqrt{48a^3b^8} =$ scompongo 48 in fattori primi

  $\sqrt{2^4 \cdot 3a^3b^8} =$ i fattori $2,\ a$ e b hanno esponente maggiore dell'indice della radice quindi si possono portare fuori dal simbolo di radice. Eseguiamo le divisioni tra gli esponenti di questi fattori e l'indice della radice:

  $4:2 = 2 \quad \text{con resto } 0$

  $3:2 = 1 \quad \text{con resto } 1$

  $8:2 = 4 \quad \text{con resto } 0$

  $2^2ab^4\sqrt{3a} = 4ab^4\sqrt{3a}$

- $\sqrt[3]{a^7x^5 + 3a^7x^4 + 3a^7x^3 + a^7} =$ scompongo in fattori il radicando

  $= \sqrt[3]{a^7x^2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)} =$

  $= \sqrt[3]{a^7(x+1)^3} =$ tutti i fattori hanno esponente maggiore o uguale all'indice della radice

  $= a^2(x+1)\sqrt[3]{a}$

attenzione: i termini che si possono portare fuori dal segno di radice devono essere dei **fattori** quindi ad esempio nel radicale $\sqrt{x^5 + y^4}$ anche se gli esponenti sono maggiori dell'indice della radice, **non si può portare fuori nessun fattore**, perché non si può scomporre il radicando.

ESERCIZIO 2.5

Trasporta sotto il segno di radice i fattori che moltiplicano i seguenti radicali e, se possibile, semplifica

1. $\frac{4}{5}\sqrt{10}$
2. $-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{8}{25}}$
3. $(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$
4. $a\sqrt[4]{\left(3+\frac{1}{a^2}\right)^2}$
5. $\frac{(x+2)}{x}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+4x+4}}$

ESERCIZIO 2.6

Semplifica i seguenti radicali, portando fuori dal segno di radice i fattori possibili (supponi positivo ciascun fattore del radicando)

1. $\sqrt{32x^3y^2z^4t}$
2. $\sqrt{\frac{8}{9}a^5b^6}$
3. $\sqrt{\frac{x^6+3x^8}{27}}$
4. $3a\cdot\sqrt{\frac{1}{9a^2}-\frac{2}{27a^3}+\frac{1}{81a^4}}$
5. $\sqrt{\frac{3x^2+12x+12}{x^2-4x+4}}$

- **La potenza di un radicale**

  Per calcolare la potenza di un radicale si deve elevare il radicando all'esponente indicato.

  Esempio

  - $\left(\sqrt[5]{3}\right)^2=\sqrt[5]{3^2}=\sqrt[5]{9}$

ESERCIZIO 2.7

1. $\left(\sqrt[12]{8}\right)^5$
2. $\left(\sqrt[6]{x^5}\right)^3\cdot\left(\sqrt[9]{x^2}\right)^3$
3. $\left(\sqrt[4]{x}\right)^8:\left(\sqrt[5]{x}\right)^{10}$

4. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$
5. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$

- **La radice di una radice**

  La radice di una radice si calcola moltiplicando gli indici delle radici.

  Esempio

  - $\sqrt[4]{\sqrt{3}}=\sqrt[8]{3}$
  - $\sqrt{3\sqrt{5}}=$ portiamo il fattore 3 sotto la radice più interna

    $=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot 5}}=\sqrt[4]{45}$

ESERCIZIO 2.7

1. $\sqrt[8]{\sqrt{32x^2}}$
2. $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^6}{(a+b)^4}}}$
3. $\sqrt{5\sqrt{5}}$
4. $\sqrt[8]{a^7\sqrt[5]{a}}$
5. $\sqrt[3]{\frac{1}{a-1}\sqrt{a^2-1}}$

- **Somma algebrica**

  Due radicali si possono sommare solo se sono simili. Per sommarli si sommano i loro coefficienti.

ESERCIZIO 2.8

1. $\sqrt{28}+\sqrt{175}-3\sqrt{7}+4\sqrt{63}$
2. $\sqrt{8}-5\sqrt{2}+\sqrt{27}-\sqrt{12}$
3. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{40}+\sqrt{50}\left(\sqrt{2}-1\right)$
4. $\sqrt{a^2b}+3\sqrt{b^3}-a\sqrt{4b}$

- **Razionalizzazione del denominatore di una frazione**

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$$

ESERCIZIO 2.9

Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni

1. $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{a^2 b}{\sqrt{b}}$
3. $\dfrac{24}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$
4. $\dfrac{15}{\sqrt{45}+\sqrt{30}}$
5. $\dfrac{4x^2-y^2}{\sqrt{2x}-\sqrt{y}}$