

Le disequazioni di primo grado

Cos'è una disequazione?

Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni algebriche (una delle quali deve contenere un'incognita) che può essere vera o falsa a seconda dei valori attribuiti all'incognita.

Risolvere la disequazione significa trovare i valori dell'incognita, se esistono, che rendono vera la disuguaglianza.

Tali valori rappresentano la **soluzione** della disequazione.

La soluzione di una disequazione può essere scritta in diversi modi:

- per caratteristica
- graficamente
- simbolicamente con gli intervalli

Una **disuguaglianza** è una relazione tra due numeri o tra due espressioni letterali che indica che i due numeri o le due espressioni non sono uguali tra loro. I simboli che rappresentano queste relazioni sono

- > maggiore
- < minore
- ≥ maggiore o uguale
- ≤ minore o uguale

$$x \geq -3$$



$$[-3; +\infty)$$

Due disequazioni sono equivalenti quando hanno lo stesso insieme soluzione.

Una disequazione si può trasformare in un'altra equivalente applicando i **principi di equivalenza delle disequazioni**.

Primo principio: addizionando o sottraendo a entrambi i membri di una disequazione un numero o un'espressione che ha sempre significato, si ottiene una disequazione equivalente alla precedente

Da questo principio deriva la **regola del trasporto** che permette di **spostare un termine da un membro all'altro di una disequazione cambiandogli il segno**.

Secondo principio:

- moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero **maggiore** di zero, si ottiene una disequazione equivalente alla precedente
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero **minore** di zero e **cambiando il verso** della disequazione, si ottiene una disequazione equivalente alla precedente

Da questo principio deriva la **regola di moltiplicazione o divisione** che permette di moltiplicare o dividere entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero

Attenzione: se il numero per cui si moltiplica o si divide è positivo il verso della disequazione non cambia, se è negativo si deve cambiare il verso della disequazione.

$20x < 60 \rightarrow \frac{20}{20}x < \frac{60}{20} \rightarrow x < 3$ ho diviso entrambi i membri per un numero **positivo** quindi **non cambio** il verso della disequazione

$-4x > 12 \rightarrow 4x < -12$ ho diviso entrambi i membri per un numero **negativo** quindi **cambio il verso** della disequazione

Come si risolve una disequazione intera?

Per risolvere una disequazione intera la devo trasformare, applicando i due principi di equivalenza, in una disequazione equivalente nella forma $ax < b$ o $ax > b$

Per farlo:

- elimino le parentesi
- riduco allo stesso denominatore (minimo comune multiplo tra i denominatori) i due membri della disequazione e elimino il denominatore così ottenuto (regola della moltiplicazione)
- sposto i termini con l'incognita a primo membro e i termini noti a secondo membro applicando la regola del trasporto
- se il coefficiente dell'incognita è negativo moltiplico per -1 cambiando il verso della disequazione (regola della moltiplicazione)
- divido entrambi i membri della disequazione per il coefficiente dell'incognita (regola della divisione)

Casi particolari

Se dopo aver applicato i primi quattro punti si ottiene una disequazione con il coefficiente dell'incognita uguale a 0 la disequazione è o **impossibile** o **sempre verificata**.

Quando una disequazione è impossibile l'insieme soluzione è \emptyset , quando è sempre verificata l'insieme soluzione è \mathbb{R}

Esempi

- $0 \cdot x < -5$ **impossibile** infatti un qualunque numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0 che non è minore di un numero negativo
- $0 \cdot x > 9$ **impossibile** infatti un qualunque numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0 che non è maggiore di un numero positivo
- $0 \cdot x < 15$ **sempre verificata** infatti un qualunque numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0 che è sempre minore di un numero positivo
- $0 \cdot x > -56$ **sempre verificata** infatti un qualunque numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0 che è sempre maggiore di un numero negativo

ESERCIZIO 1.1

Risolvi le seguenti disequazioni

1. $x + 4 - 3(x - 3) \geq 5 - (2 + 7x)$

2. $4 - x + 6 \leq -x + 8$

3. $x(x - 3) + 2(3 - x) \leq (x + 1)^2 - 4x$

4. $4x(x + 3) - (2x + 3)(2x - 3) - 6x \geq 4 - (2x - 3)$

5. $-7(x - 1) - \frac{2}{3} < 3(x + 2) + \frac{1}{3}$

6. $\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}(x + 2) < \frac{1}{2}(x - 3)$

7. $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) - (x - 2)(x + 5) > \frac{5}{4}$

8. $\frac{x + 9}{2} - \frac{3x + 4}{3} < -2$

9. $\frac{2}{5}\left(\frac{2x - 1}{3} - \frac{x + 2}{4} - \frac{x - 4}{12}\right) - \frac{4}{3} > \frac{x - 1}{2} - \frac{4 - x}{3}$

10. $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 4}{24} - \frac{2x - 3}{4} < \frac{1}{8}$

11. $\frac{x(x - 1)}{3} - (x - 1)^2 < \frac{2}{5}\left(\frac{5}{3}x + 1\right)(1 - x) + 1 - x$

12. $(x - 5)(x + 5) - (x - 4)^2 < 8x + 5$

13. $12(x + 1) + 3x - 5 < 7(x + 1)$

14. $4(5x - 1) \geq 12 + 20x$

15. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{9x + 4}{12} + \frac{5 - x^2}{3} \geq \frac{2x - 1}{9}$

16. $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 \geq 10 - \frac{1}{2}x$

Come si risolve un sistema di disequazioni?

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni.

Risolvere il sistema significa trovare le soluzioni comuni a tutte le disequazioni .

Per risolvere un sistema:

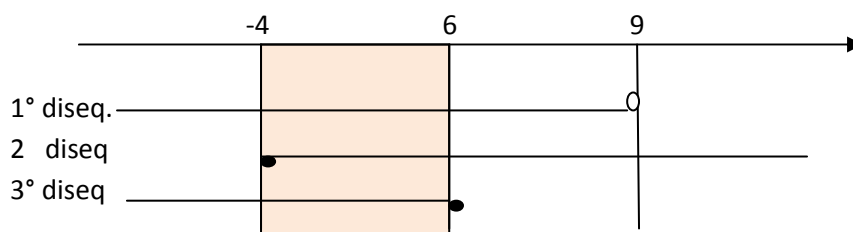
- si risolvono le varie disequazioni del sistema
- si rappresentano graficamente le soluzioni
- si individuano gli intervalli in cui sono verificate tutte le disequazioni del sistema, cioè gli intervalli comuni a tutte le soluzioni delle disequazioni.

Esempio

Dato il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x < 9 \\ x \geq -4 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

rappresentiamo graficamente le soluzioni delle tre disequazioni



Nel grafico il "pallino pieno" corrisponde ad un valore che appartiene all'insieme soluzione della disequazione (\leq o \geq) mentre il "pallino vuoto" corrisponde a un valore non compreso.

La soluzione del sistema è quindi $-4 \leq x \leq 6$

ESERCIZIO 1.2

1.
$$\begin{cases} 2x - 5 < 4 - x \\ (x + 1)^2 < (x - 1)^2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3(x - 1) - 6x + 5 > -5(x + 2) \\ 2(3x - 1) < 9x - (x - 3) \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x - 6 < 2(x - 1) + 3 \\ x - 3(x + 2) > 2x - 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \\ 7(3x+9) > 4(5x+16) \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} (x-4) - \frac{1}{2}(x+3) \leq \frac{1-x}{3} \\ \frac{1}{5}(x-1) < x+3\left(\frac{2}{3}-x\right) \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{x-1}{2} > \frac{x+1}{3} - \frac{1}{12} \\ 6x-3 \leq x+2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 5x+3 < 4+2x \\ 3x-6 > x-3 \\ 4x+7 \geq x-1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x+1 > 1 \\ x-3 < 6 \\ 2x-5 > \frac{2x+1}{3} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x(x-6)+x-2x^2 \leq 1 \\ x-6 > 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{1-x}{6} < \frac{x}{2} \\ \frac{x+5}{3} > 3 \end{cases}$$